

# NAKAYAMA-FUNKTOR UND AUSLANDER-REITEN-VERSCHIEBUNG

MARKUS KEPPELER, KEVIN LOHMANN

ZUSAMMENFASSUNG. Dies ist die Ausarbeitung eines Seminarvortrages zum Thema "Nakayama-Funktor und Auslander-Reiten-Verschiebung", der an der Universität Münster gehalten wurde. Die Ausarbeitung basiert auf dem Paper "Lectures on Representations of Quivers" von William Crawley-Boevey und bezieht sich auf die Seiten 21 und 22. Im Wesentlichen geht es um folgende Themen:

- Die Funktoren  $D$  und  $\text{Hom}$  werden eingeführt und grundlegende Eigenschaften werden erklärt.
- Definition des *Nakayama-Funktors* und der *Auslander-Reiten-Verschiebung* sowie einige Folgerungen daraus.

Wir nehmen im Folgenden an, dass  $Q$  ein Köcher ohne Zykel sei. Insbesondere ist die Wegealgebra  $A = kQ$  endlich dimensional. Wir betrachten im Folgenden endlich dimensionale  $A$ -Moduln und beschäftigen uns mit den Eigenschaften von projektiven, injektiven, nicht projektiven und nicht-injektiven Moduln.

**Definition.** Ein  $A$ -Modul  $I$  heisst *injektiv*, wenn gilt: Seien  $B$  und  $C$  weitere  $A$ -Moduln,  $h : B \rightarrow I$  und  $g : B \rightarrow C$  seien Abbildungen,  $g$  sei injektiv. Dann gibt es eine Abbildung  $f : C \rightarrow I$ , die folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow h & \swarrow \exists f & \downarrow \\ I & & \end{array}$$

**Bemerkung.** Alle bekannten Sätze über projektive Moduln gelten dual für injektive Moduln.

**Lemma (Fünferlemma).** Folgendes Diagramm von  $A$ -Moduln sei kommutativ und habe exakte Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{i_1} & M_2 & \xrightarrow{i_2} & M_3 & \xrightarrow{i_3} & M_4 & \xrightarrow{i_4} & M_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ N_1 & \xrightarrow{j_1} & N_2 & \xrightarrow{j_2} & N_3 & \xrightarrow{j_3} & N_4 & \xrightarrow{j_4} & N_5 \end{array}$$

Falls  $f_2$  und  $f_4$  bijektiv,  $f_1$  surjektiv und  $f_5$  injektiv sind, so ist  $f_3$  bijektiv.

Wir stellen nun einige Funktoren und deren Eigenschaften vor:

**Eigenschaft 1.** Für einen  $A$ -Links- bzw.  $A$ -Rechtsmodul  $X$  definieren wir

$$D(X) := \text{Hom}_k(X, k).$$

$D(X)$ ,  $\text{Hom}(X, A)$  und  $\text{Ext}^1(X, A)$  sind dann  $A$ -Rechts- bzw.  $A$ -Linksmoduln.

*Beweis.* Die Funktorialität von  $D$ ,  $\text{Hom}$  und  $\text{Ext}^1$  ist aus der linearen Algebra und vorherigen Vorträgen bekannt. Es bleibt die Transformation zwischen Links- und

Rechtsmoduln zu zeigen. Wir führen dies exemplarisch am Beispiel von  $D$  vor, für die anderen Funktoren funktioniert der Beweis analog:

Sei  $X$  ein  $A$ -Linksmodul. Zu zeigen ist, dass  $D(X)$  ein  $A$ -Rechtsmodul ist. Sei dazu  $\varphi \in D(X) = \text{Hom}_k(X, k)$  gegeben. Definiere die Modulstruktur durch

$$(\varphi a)(x) := \varphi(ax)$$

Zu zeigen sind

- $(\varphi 1)(x) = \varphi(x)$  sowie
- $(\varphi(ab))(x) = ((\varphi a)b)(x)$ .

Beweis:

- $(\varphi 1)(x) = \varphi(1x) = \varphi(x)$
- $\varphi(ab)(x) = \varphi(abx)$   
 $((\varphi a)b)(x) = (\varphi a)(bx) = \varphi(abx)$

Sei nun  $X$  ein  $A$ -Rechtsmodul. Wir zeigen ganz analog zu oben, dass dann  $D(X)$  ein  $A$ -Linksmodul ist. Sei dazu  $\varphi \in D(X) = \text{Hom}_k(X, k)$  gegeben. Definiere die Modulstruktur durch

$$(a\varphi)(x) = \varphi(xa)$$

Zu zeigen sind

- $(1\varphi)(x) = \varphi(x)$  sowie
- $(ab)\varphi(x) = (a(b\varphi))(x)$

Beweis:

- $(1\varphi)(x) = \varphi(x1) = \varphi(x)$
- $(ab)\varphi(x) = \varphi(xab)$   
 $(a(b\varphi))(x) = (b\varphi)(xa) = \varphi(xab)$

□

**Eigenschaft 2.**  $D$  induziert eine kontravariante Kategorienäquivalenz zwischen endlich dimensionalen  $A$ -Linksmoduln und  $A$ -Rechtsmoduln.

*Beweis.* Nach Eigenschaft 1 folgt, dass  $D$  einen Linksmoduln auf einen Rechtsmoduln abbildet, und umgekehrt. Nach LA ist bekannt, dass  $D(D(X)) \cong X$  gilt, also liefert  $D$  eine kontravariante Kategorienäquivalenz. □

**Eigenschaft 3.**  $D$  liefert eine kontravariante Kategorienäquivalenz zwischen injektiven Linksmoduln und projektiven Rechtsmoduln.

*Beweis.* Sei  $D(I)$  ein projektiver Rechtsmodul,  $B$  und  $C$  seien beliebige  $A$ -Moduln,  $h : B \rightarrow I$  und  $g : B \rightarrow C$  seien Abbildungen,  $g$  sei zudem injektiv. Zu zeigen ist, dass eine Abbildung  $f : C \rightarrow I$  existiert, die folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow h & \swarrow \exists f & \\ I & & \end{array}$$

Da  $D(I)$  projektiv ist, existiert eine Abbildung  $D(f)$ , die folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} D(B) & \xleftarrow{D(g)} & D(C) \\ \uparrow D(h) & \swarrow D(f) & \\ D(I) & & \end{array}$$

Anwenden von  $D$  liefert dann die gesuchte Abbildung  $f$ , die oberes Diagramm kommutieren lässt, folglich ist die gesuchte Abbildung gefunden und  $I$  daher injektiv. Der Rest der Behauptung folgt aus den Eigenschaften 1 und 2.

Die andere Richtung ist exakt analog. □

**Eigenschaft 4.**  $\text{Hom}(-, A)$  liefert eine kontravariante Kategorienäquivalenz zwischen projektiven Linksmoduln und projektiven Rechtsmoduln.

*Beweis.* Zu zeigen sind:

- a)  $L$  Linksmodul  $\Rightarrow \text{Hom}(L, A)$  Rechtsmodul
- b)  $R$  Rechtsmodul  $\Rightarrow \text{Hom}(R, A)$  Linksmodul
- c)  $P$  projektiv  $\Rightarrow \text{Hom}(P, A)$  projektiv
- d)  $P$  projektiv  $\Rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(P, A), A) \cong P$

Beweis:

- a) Dies folgt aus Eigenschaft 1.
- b) Dies folgt aus Eigenschaft 1.
- c)  $P$  projektiv  $\Leftrightarrow A^n \cong P \oplus Q$ . Es gilt  $\text{Hom}(A^n, A) \cong A^n$ . Nach der Additivität von  $\text{Hom}$  gilt nun

$$\begin{aligned} P \oplus Q &\cong A^n \cong \text{Hom}(A^n, A) \\ &\cong \text{Hom}(P, A) \oplus \text{Hom}(Q, A) \end{aligned}$$

und damit ist auch  $\text{Hom}(P, A)$  projektiv (als direkter Summand eines projektiven Moduls).

- d) Wir zeigen die Aussage für  $A^n$ :

$$\text{Hom}(\text{Hom}(A^n, A), A) \cong \text{Hom}(A^n, A) \cong A^n$$

Dies vererbt sich auf direkte Summanden von  $A^n$  (wegen der Additivität von  $\text{Hom}$ ), also auch auf  $P$  ( $A^n \cong P \oplus Q$ ).

□

**Eigenschaft 5** (Nakayama-Funktor). Der *Nakayama-Funktor*

$$\nu(-) := \text{DHom}(-, A)$$

liefert eine Äquivalenz zwischen projektiven Linksmoduln und injektiven Linksmoduln. Der inverse Funktor ist

$$\nu^{-}(-) = \text{Hom}(D(-), A) \cong \text{Hom}(D(A), -).$$

*Beweis.* Die Funktorialität folgt daraus, dass die Verknüpfung von Funktoren wieder einen Funktor liefert.

Sei  $P$  ein projektiver Linksmodul. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nu P &= \text{D} \left( \underbrace{\text{Hom}(P, A)}_{\substack{\text{projektiver Rechtsmodul, nach Eigenschaft 4} \\ \text{injektiver Linksmodul, nach Eigenschaft 3}}} \right) \end{aligned}$$

Also bildet  $\nu$  wie gefordert einen projektiven Linksmodul auf einen injektiven Linksmodul ab.

Sei nun  $I$  ein injektiver Linksmodul. Dann gilt

$$\begin{aligned} \nu^{-} I &= \text{Hom} \left( \underbrace{D(I)}_{\substack{\text{projektiver Rechtsmodul, nach Eigenschaft 3} \\ \text{projektiver Linksmodul, nach Eigenschaft 4}}} , A \right) \end{aligned}$$

Also bildet  $\nu^-$  wie gefordert einen injektiven Linksmodul auf einen projektiven Linksmodul ab.

Um die Äquivalenz des Nakayama-Funktors nachzuweisen ist noch zu zeigen, dass  $\nu$  und  $\nu^-$  invers zueinander sind: Sei dazu  $P$  ein projektiver Linksmodul. Zu zeigen ist  $\nu^-(\nu(P)) \cong P$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \nu^-(\nu(P)) &= \nu^-(\mathrm{DHom}(P, A)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{D}(A), \mathrm{DHom}(P, A)) \\ &\stackrel{\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{D}(Y), \mathrm{D}(X))}{\cong} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, A), A) \\ &\stackrel{\text{Beweis von Eigenschaft 4}}{\cong} P \end{aligned}$$

Sei nun  $I$  ein injektiver Linksmodul. Zu zeigen ist  $\nu(\nu^-(I)) \cong I$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \nu(\nu^-(I)) &= \nu(\mathrm{Hom}(\mathrm{D}(A), I)) = \mathrm{DHom}(\mathrm{Hom}(\mathrm{D}(A), I), A) \\ &\stackrel{\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{D}(Y), \mathrm{D}(X))}{\cong} \mathrm{D}(\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathrm{D}(I), A), A)) \\ &\stackrel{\text{Beweis von Eigenschaft 4}}{\cong} \mathrm{D}(\mathrm{D}(I)) \cong I \end{aligned}$$

□

**Eigenschaft 6.** Für  $A$ -Linksmoduln  $X$  und  $P$  gilt  $\mathrm{Hom}(X, \nu P) \cong \mathrm{DHom}(P, X)$ , falls  $P$  projektiv ist.

*Beweis.* Die Verknüpfung

$$\mathrm{Hom}(P, A) \otimes_A X \cong \mathrm{Hom}(P, A) \otimes_A \mathrm{Hom}(A, X) \rightarrow \mathrm{Hom}(P, X)$$

liefert einen Isomorphismus (denn sie liefert einen für  $P = A^n$ , dann Vererbung auf Summanden ausnutzen). Nun gilt also

$$\begin{aligned} \mathrm{DHom}(P, X) &= \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, X), k) \\ &\cong \mathrm{Hom}(P, A \otimes_A X, k) \\ &\cong \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, A), k)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(X, \nu P). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass gilt:

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Hom}(X, Z))$$

□

**Definition** (Auslander-Reiten-Verschiebung). Die *Auslander-Reiten-Verschiebung* von einem  $A$ -Linksmodul  $X$  ist

$$\tau X = \mathrm{DExt}^1(X, A).$$

Wir definieren ausserdem

$$\tau^- X = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{D}(X), A) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathrm{D}(A), X).$$

**Korollar.** Ist

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, so gibt es, da  $A$  erblich ist, lange exakte Sequenzen

$$(1) \quad 0 \rightarrow \tau L \rightarrow \tau M \rightarrow \tau N \rightarrow \nu L \rightarrow \nu M \rightarrow \nu N \rightarrow 0$$

und

$$(2) \quad 0 \rightarrow \nu^- L \rightarrow \nu^- M \rightarrow \nu^- N \rightarrow \tau^- L \rightarrow \tau^- M \rightarrow \tau^- N \rightarrow 0.$$

*Beweis.* (1) 2.1 des dritten Vortrages auf die kurze Sequenz angewendet ergibt die lange Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \operatorname{Hom}_A(N, A) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(M, A) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(L, A) \\ &\rightarrow \operatorname{Ext}_A^1(N, A) \rightarrow \operatorname{Ext}_A^1(M, A) \rightarrow \operatorname{Ext}_A^1(L, A) \\ &\rightarrow \underbrace{\operatorname{Ext}_A^2(N, A)}_{=0, \text{ nach 2.4 des dritten Vortrages}} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Funktor  $D$  auf diese Sequenz an. Dieser ist exakt, also bleibt die Sequenz exakt:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \operatorname{DExt}^1(L, A) \rightarrow \operatorname{DExt}^1(M, A) \rightarrow \operatorname{DExt}^1(N, A) \\ &\rightarrow \operatorname{DHom}(L, A) \rightarrow \operatorname{DHom}(M, A) \rightarrow \operatorname{DHom}(N, A) \\ &\rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Dies ist nach Definition die erste gesuchte lange exakte Sequenz.

(2) Für die zweite Sequenz gehen wir genau andersherum vor: Wir wenden zuerst  $D$  auf die kurze Sequenz an:

$$0 \rightarrow D(N) \rightarrow D(M) \rightarrow D(L) \rightarrow 0$$

Nun wenden wir 2.1 aus dem dritten Vortrag an und erhalten die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \operatorname{Hom}(D(L), A) \rightarrow \operatorname{Hom}(D(M), A) \rightarrow \operatorname{Hom}(D(N), A) \\ &\rightarrow \operatorname{Ext}_A^1(D(L), A) \rightarrow \operatorname{Ext}_A^1(D(M), A) \rightarrow \operatorname{Ext}_A^1(D(N), A) \\ &\rightarrow \underbrace{\operatorname{Ext}_A^2(D(L), A)}_{=0, \text{ nach 2.4 des dritten Vortrages}} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Dies ist nach Definition die zweite gesuchte lange exakte Sequenz.  $\square$

**Lemma 1.** Seien  $X$  und  $Y$   $A$ -Linksmoduln. Dann gilt

$$\operatorname{Hom}(Y, \tau X) \cong \operatorname{DExt}^1(X, Y) \cong \operatorname{Hom}(\tau^- Y, X).$$

*Beweis.* Wir beweisen zuerst  $\operatorname{Hom}(Y, \tau X) \cong \operatorname{DExt}^1(X, Y)$ : Sei

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow X \rightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von  $X$ . Diese existiert, da nach 2.4 des dritten Vortrages die projektive Dimension von  $X$  kleiner gleich 1 ist. Wir wenden (1) an und erhalten

$$0 \rightarrow \tau P \rightarrow \tau Q \rightarrow \tau X \rightarrow \nu P \rightarrow \nu Q \rightarrow \nu X \rightarrow 0.$$

Diese Sequenz kürzen wir und erhalten damit die exakte Sequenz

$$\tau Q \rightarrow \tau X \rightarrow \nu P \rightarrow \nu Q.$$

Es gilt  $\tau Q = 0$ , denn  $Q$  ist projektiv (vgl. 2.3 des dritten Vortrages:  $\operatorname{Ext}^1(Q, A) = 0 \Rightarrow \tau Q = \operatorname{DExt}^1(Q, A) = 0$ ). Wir wenden nun einerseits  $\operatorname{Hom}(Y, -)$  auf diese Sequenz an, andererseits  $\operatorname{Hom}(-, Y)$  und  $D$  auf die projektive Auflösung und erhalten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(Y, \tau X) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(Y, \nu P) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(Y, \nu Q) \\ & & & & \parallel & \text{nach Eigenschaft 6} & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{DExt}^1(X, Y) & \longrightarrow & \operatorname{DHom}(P, Y) & \longrightarrow & \operatorname{DHom}(Q, Y) \end{array}$$

Wir wenden nun das Fünferlemma auf folgendes erweitertes Diagramm an (die Zeilen bleiben beim Erweitern exakt)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(Y, \tau X) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y, \nu P) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y, \nu Q) \\ & & & & & & \parallel & \text{nach Eigenschaft 6} & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{DExt}^1(X, Y) & \longrightarrow & \text{DHom}(P, Y) & \longrightarrow & \text{DHom}(Q, Y) \end{array}$$

und erhalten den gesuchten Isomorphismus  $\text{Hom}(Y, \tau X) \cong \text{DExt}^1(X, Y)$ .

Nun beweisen wir  $\text{DExt}^1(X, Y) \cong \text{Hom}(\tau^- Y, X)$ : Sei

$$0 \rightarrow Y \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow 0$$

eine injektive Co-Auflösung von  $Y$ . Diese existiert (dual zu 2.4 des dritten Vortrages). Wir wenden (2) an und erhalten

$$0 \rightarrow \nu^- Y \rightarrow \nu^- I \rightarrow \nu^- J \rightarrow \tau^- Y \rightarrow \tau^- I \rightarrow \tau^- J \rightarrow 0.$$

Diese Sequenz kürzen wir und erhalten damit die exakte Sequenz

$$\nu^- I \rightarrow \nu^- J \rightarrow \tau^- Y \rightarrow \tau^- I.$$

Es gilt  $\tau^- I = 0$ , denn  $I$  ist injektiv, und damit  $D(I)$  nach Eigenschaft 3 projektiv, Rest vgl. 2.3 des dritten Vortrages). Wir wenden nun einerseits  $\text{Hom}(-, X)$  auf diese Sequenz an, andererseits  $\text{Hom}(X, -)$  und  $D$  auf die injektive Co-Auflösung an und erhalten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\tau^- Y, X) & \longrightarrow & \text{Hom}(\nu^- J, X) & \longrightarrow & \text{Hom}(\nu^- I, X) \\ & & & & \parallel & \text{nach Eigenschaft 6} & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{DExt}^1(X, Y) & \longrightarrow & \text{DHom}(X, J) & \longrightarrow & \text{DHom}(X, I) \end{array}$$

Wir wenden nun das Fünferlemma auf folgendes erweiterte Diagramm an

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\tau^- Y, X) & \longrightarrow & \text{Hom}(\nu^- J, X) & \longrightarrow & \text{Hom}(\nu^- I, X) \\ & & & & & & \parallel & \text{nach Eigenschaft 6} & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{DExt}^1(X, Y) & \longrightarrow & \text{DHom}(X, J) & \longrightarrow & \text{DHom}(X, I) \end{array}$$

und erhalten den gesuchten Isomorphismus  $\text{DExt}^1(X, Y) \cong \text{Hom}(\tau^- Y, X)$ .  $\square$

**Lemma 2.** Sei  $X$  unzerlegbar. Dann gilt:

- Falls  $X$  nicht projektiv ist, so gilt  $\text{Hom}(X, P) = 0$  für projektives  $P$  und  $\tau^- \tau X \cong X$ .
- Falls  $X$  nicht injektiv ist, so gilt  $\text{Hom}(I, X) = 0$  für injektives  $I$  und  $\tau \tau^- X \cong X$ .

*Beweis.* a) Sei  $\sigma : X \rightarrow P$  nicht die Nullabbildung. Dann ist  $\text{Bild}(\sigma)$  ein projektiver Untermodul, da  $A$  erblich ist.  $X \rightarrow \text{Bild}(\sigma)$  ist surjektiv, also ist  $\text{Bild}(\sigma)$  ein Summand von  $X$ . Da  $X$  unzerlegbar ist und  $\sigma$  nicht die Nullabbildung ist, muss also  $X \cong \text{Bild}(\sigma)$  gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, da  $X$  nicht projektiv ist (im Gegensatz zu  $\text{Bild}(\sigma)$ ). Also muss  $\text{Hom}(X, P) = 0$  gelten.

Wir zeigen nun  $\tau^- \tau X \cong X$ : Sei  $0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow X \rightarrow 0$  eine projektive Auflösung. Wir wenden die Sequenz (1) an und kürzen zu

$$\tau Q \rightarrow \tau X \rightarrow \nu P \rightarrow \nu Q \rightarrow \nu X.$$

Diese Sequenz ist immer noch exakt und es gilt  $\tau Q = \nu X = 0$ , denn  $Q$  projektiv und damit  $\text{Ext}^1(Q, A) = 0$ ,  $\text{Hom}(X, A) = 0$  (nach oben Gesagtem). Auf diese Sequenz wenden wir (2) an und kürzen das Ergebnis passend und erhalten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \nu^- \nu P & \longrightarrow & \nu^- \nu Q & \longrightarrow & \tau^- \tau X & \longrightarrow & \tau^- \nu P \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es ist  $\tau^- \nu P = 0$ , denn  $P$  projektiv  $\Rightarrow \nu P$  injektiv  $\Rightarrow D(\nu P)$  projektiv  $\Rightarrow \tau^- \nu P = \text{Ext}^1(D(\nu P), A) = 0$ . Wir wenden nun das Fünferlemma auf folgendes erweiterte Diagramm an

$$\begin{array}{ccccccccccc} \nu^- \nu P & \longrightarrow & \nu^- \nu Q & \longrightarrow & \tau^- \tau X & \longrightarrow & \tau^- \nu P & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & & & & & \\ P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und erhalten  $\tau^- \tau X \cong X$ .

- b) Sei  $\sigma : I \rightarrow X$  nicht die Nullabbildung. Dann ist  $\text{Bild}(\sigma)$  ein injektiver Faktormodul von  $X$ , da  $A$  erblich ist.  $\text{Bild}(\sigma) \rightarrow X$  ist injektiv, also ist  $\text{Bild}(\sigma)$  ein Summand von  $X$  (nach Definition von injektiv). Da  $X$  unzerlegbar ist und  $\sigma$  nicht die Nullabbildung ist, muss also  $X \cong \text{Bild}(\sigma)$  gelten. Dies ist aber ein Widerspruch, da  $X$  nicht injektiv ist (im Gegensatz zu  $\text{Bild}(\sigma)$ ). Also muss  $\text{Hom}(I, X) = 0$  gelten.

Wir zeigen nun  $\tau \tau^- X \cong X$ : Sei  $0 \rightarrow X \rightarrow Q \rightarrow I \rightarrow 0$  eine injektive Co-Auflösung. Wir wenden die Sequenz (2) an und kürzen zu

$$\nu^- X \rightarrow \nu^- Q \rightarrow \nu^- I \rightarrow \tau^- X \rightarrow \tau^- Q.$$

Diese Sequenz ist immer noch exakt und es gilt  $\nu^- X = 0$ , denn

$$\nu^- X = \text{Hom}(\underbrace{D(X)}_{\text{nicht projektiv}}, \underbrace{A}_{\text{projektiv}}) \stackrel{\text{Lemma 2a}}{=} 0.$$

$\tau^- Q$  ist auch gleich 0, denn  $D(Q)$  ist projektiv, also  $\tau^- Q = 0$ . Auf diese Sequenz wenden wir nun (1) an und erhalten

$$0 \rightarrow \tau \nu^- Q \rightarrow \tau \nu^- I \rightarrow \tau \tau^- X \rightarrow \nu \nu^- Q \rightarrow \nu \nu^- I \rightarrow \nu \tau^- X \rightarrow 0$$

Nun ist  $\tau \nu^- Q = 0 = \tau \nu^- I$ , denn  $Q$  und  $I$  sind injektiv, und daher sind  $\nu^- \{I, Q\}$  projektiv, also gilt  $\tau \nu^- \{I, Q\} = 0$ . Ausserdem ist  $\nu \tau^- X = 0$ , denn  $\tau^- X$  ist nicht projektiv, also gilt

$$\nu \tau^- X = D \text{Hom}(\underbrace{\tau^- X}_{\text{nicht projektiv}}, \underbrace{A}_{\text{projektiv}}) = 0. \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{=0, \text{ nach Lemma 2a}}$$

Also erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tau \tau^- X & \longrightarrow & \nu \nu^- Q & \longrightarrow & \nu \nu^- I \\ & & & & & & \parallel & \text{Eigenschaft 6} & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & I \end{array}$$

Nach dem Fünferlemma gilt also  $\tau \tau^- X \cong X$ . □

UNIVERSITÄT MÜNSTER, EINSTEINSTR. 62, 48161 MÜNSTER, GERMANY  
*E-mail address:* Markus@markus-keppeler.de, Student@kevinlohmann.de  
*URL:* <http://www.markus-keppeler.de/studium/>