by Markus Keppeler, http://www.markus-keppeler.de/

1 Prädikatklassen

PRT primitiv rekursive Funktionsterme ($\underline{S}$, $\underline{C_k^n}$, $\underline{P_k^n}$, $\underline{\text{Sub}}$, $\underline{\text{Rec}}$)

PRF primitiv rekursive Funktionen (S, C_k^n, P_k^n), abgeschlossen unter Rekursion und Substitution

PRP primitiv rekursive Prädikate, P $\in$ PRP $\Leftrightarrow$ χ_P $\in$ PRF

PRI := {x $\in$ $\mathbb{N}$ | $\exists$f $\in$ PRT mit x = [f]} ([f] ist die Kodierung von f)

PI := {x $\in$ $\mathbb{N}$ | $\exists$f $\in$ PT mit x = [f]} ([f] ist die Kodierung von f)

PT partiell rekursive Funktionsterme (PRT + unbeschränkter Suchoperator μ)

$\mathbb{P}$ partiell rekursive Funktionen
kleinste Klasse, die S, C_k^n, P_k^n enthält und unter Sub, Rec, μ abgeschlossen ist.
$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{Reg} = \mathbb{P}_{Tur}$

$\mathbb{F}$ rekursive Funktionen
f $\in$ $\mathbb{F}$ $\Leftrightarrow$ f $\in$ $\mathbb{P}$ und f total
$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{Reg} = \mathbb{F}_{Tur}$

RP rekursive Prädikate, P $\in$ RP $\Leftrightarrow$ χ_P $\in$ $\mathbb{F}$

RAP (=SRP) rekursiv aufzählbare Prädikate
P $\in$ RAP $\Leftrightarrow$ $\exists$f $\in$ $\mathbb{F}$ mit P = rg(f) $\Leftrightarrow$ $\exists$f $\in$ $\mathbb{P}$ mit P=dom(f)
P $\in$ RP $\Leftrightarrow$ P $\in$ RAP $\wedge$ $\neg$P $\in$ RAP (Satz von Post)

Inklusionen PRP $\subset$ RP $\subset$ RAP = SRP

arithmetische Hierarchie $\Delta_0^0 = \Pi_0^0 = \Sigma_0^0$
Σ_1^0 = RAP, Δ_1^0 = RP, Π_1^0 = coRAP

P $\in$ Σ_n^0 $\Leftrightarrow$ (y $\in$ P $\Leftrightarrow$ $\exists x_1\ \forall x_2\ \exists x_3\ \ldots\ \psi(\vec{x}, y)$)
P $\in$ Π_n^0 $\Leftrightarrow$ (y $\in$ P $\Leftrightarrow$ $\forall x_1\ \exists x_2\ \forall x_3\ \ldots\ \psi(\vec{x}, y)$)
(mit jeweils n Quantoren und ψ quantorfreie Funktion)

Abschlusseigenschaften

	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\exists^b$	$\forall^b$	$\exists$	$\forall$	Subst
PRP	+	+	+	+	+	-	-	PRF
RP	+	+	+	+	+	-	-	$\mathbb{F}$
RAP	+	+	-	+	+	+	-	$\mathbb{F}$
coRAP	+	+	-	+	+	-	+	$\mathbb{F}$

2 Chomsky - Grammatiken

$\mathcal{G} = (\Sigma, \Omega, \mathrm{S}, \mathrm{R})$
Σ Alphabet, $\Sigma \neq \emptyset$, Σ endlich
Σ^* Menge der Wörter incl. ϵ (leeres Wort)
Σ^+ Menge der Wörter positiver Länge
$\Omega \subseteq \Sigma$ terminale Zeichen
R Regelsystem, endlich
Regel aus R: $w_1 \mathrm{u} w_2 \longrightarrow_R w_1 \mathrm{v} w_2$, (u,v) $\in$ R, u,v,w_1,$w_2 \in \Sigma^*$
$\mathcal{L}_\mathcal{G} = \{w \mid S \longrightarrow_R^* w\}$

Sprachklassen

Typ(0) Allgemeine Chomsky-Sprachen

Typ(1) kontextsensitive Chomsky-Sprachen

Regeln: $w_1 A w_2 \longrightarrow_R w_1 v w_2, A \in \Sigma \backslash \Omega =: Var, v \in \Sigma^+$

Typ(2) kontextfreie Chomsky-Sprachen

Regeln: $A \longrightarrow_R v, A \in Var, v \in \Sigma^+$

Typ(3) Reguläre Sprachen (nicht weiter relevant)

Inklusionen $Typ(3) \subset Typ(2) \subset Typ(1) \subset Typ(0)$:
$Typ(0) \neq Typ(1)$: Wortproblem
$Typ(1) \neq Typ(2)$: Gegenbeispiel: $\mathcal{L}_\mathcal{G} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei (PL)

Wortproblem der Chomsky-Sprachen

Typ(0) Wortproblem i.A. unentscheidbar (i.A. $\mathcal{L}_\mathcal{G} \in \Sigma_1^0$): $w \in \mathcal{L}_\mathcal{G} \leftrightarrow \exists n S \longrightarrow_R^n w (\in \Sigma_0^1)$

Typ(1) $\mathcal{L}_\mathcal{G} \in \Delta_0^0$

(beschr. Existenzquantor: Da Wörter durch die Regeln immer länger werden, kann man beschränken)

Typ(2) $\mathcal{L}_\mathcal{G} \in \Delta_0^0$

3 Sprache der PL1

Zeichen in einer Sprache
logische Zeichen:

- freie Variablen (FV)
- gebundene Variablen (BV)
- $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$
- $\forall, \exists$

Signatur:

- Konstanten $\mathcal{C}$
- Funktionszeichen $\mathcal{F}$
- Prädikatzeichen $\mathcal{P}$

Terme, Formeln einer Sprache

Ind. Definition der Terme

- Konstanten, freie Variablen sind Terme
- f Funktionszeichen, $\sharp f = n, t_1,...,t_n$ Terme. Dann ist auch $ft_1...t_n$ ein Term.

Ind. Definition der Formeln

- P $\in \mathcal{P}, \sharp P = n, t_1, ..., t_n$ Terme. Dann ist $Pt_1...t_n$ eine (Atom-)Formel.
- F_1, F_2 Formel. Dann ist auch $F_1 \circ F_2, \circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}, \neg F_1$ eine Formel.
- F_1 Formel, $x \notin BV(F_1)$. Dann ist $\forall x F_{1,u}(x), \exists x F_{1,u}(x)$ auch Formel.

4 Strukturen

$\mathcal{S} = (S, \mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$
S Träger, $\mathbb{C}$ Interpretation der Konstanten, $\mathbb{F}$ Interpretation der Formeln, $\mathbb{P}$ Interpretation der Prädikate