

TERMINALE σ -ALGEBRA, KOLMOGOROV'S 0-1-GESETZ, BORELS 0-1-GESETZ, LEMMA VON BOREL-CANTELLI

MARKUS KEPPELER

Diese Zusammenstellung beruht auf dem Skript "Wahrscheinlichkeitstheorie 1" von Professor Matthias Löwe.

Für den Rest dieses Dokumentes sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ω ist hierbei eine Menge, \mathcal{F} eine σ -Algebra über Ω und \mathbb{P} ein Maß über \mathcal{F} mit Masse 1, d.h. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

TERMINALE σ -ALGEBRA

Sei $(\mathcal{A}_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge von Teil- σ -Algebren von \mathcal{F} und $\tau_n := \sigma(\bigcup_{m=n}^{\infty} \mathcal{A}_m)$ die durch $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}, \dots$ erzeugte σ -Algebra.

Dann heißt

$$\tau_{\infty} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau_n$$

die σ -Algebra der terminalen Ereignisse (oder terminale σ -Algebra).

KOLMOGOROV'S 0-1-GESETZ

Sei $(\mathcal{A}_n)_{\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge von Teil- σ -Algebren von \mathcal{F} . Dann gilt $\forall A \in \tau_{\infty}$:

$$\mathbb{P}(A) = 0 \vee \mathbb{P}(A) = 1$$

Beweis. Sei \mathcal{D} das System aller von A unabhängigen Mengen aus \mathcal{F} . Es wird nun gezeigt das A selbst in \mathcal{D} liegt:

\mathcal{D} ist ein Dynkin-System (leicht nachzurechnen).

$\forall n \in \mathbb{N}$ ist τ_{n+1} unabhängig von $\bar{\mathcal{A}}_n := \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n)$.

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ A in τ_{n+1} liegt, folgt $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{D}$.

Also gilt auch: $\bar{\mathcal{A}} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{A}}_n \subset \mathcal{D}$.

$\bar{\mathcal{A}}$ ist durchschnittsstabil (nachzurechnen unter Ausnutzung, das $(\bar{\mathcal{A}}_n)_{\mathbb{N}}$ wachsend ist), also gilt $\sigma(\bar{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$.

Aus $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}$ folgt dann $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{D}$.

Insgesamt gilt also:

$$\tau_{\infty} \subset \tau_n \subset \sigma(\bar{\mathcal{A}}) = \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{D}$$

Also liegt auch A in \mathcal{D} , damit ist A von sich selber unabhängig und es gilt:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$$

Daraus folgt nun $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ \square

BORELS 0-1-GESETZ

$(A_n)_{\mathbb{N}}$ sei unabhängige Folge von Ereignissen in \mathcal{F} . Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$$

$$(\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m)$$

Beweis. Sei $\mathcal{A}_n := \sigma(A_n)$. Dann ist $(\mathcal{A}_n)_{\mathbb{N}}$ Folge unabhängiger σ -Algebren.

Sei τ_{∞} die σ -Algebra der terminalen Ereignisse über diesen \mathcal{A}_n .

Sei $Q_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}: Q_n \in \tau_n$. Da sowohl $(Q_n)_{\mathbb{N}}$ als auch $(\tau_n)_{\mathbb{N}}$ fallende Folgen sind, gilt $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \stackrel{(1)}{=} \bigcap_{k=j}^{\infty} Q_k \stackrel{(2)}{\in} \tau_j$$

(1) gilt, da $(Q_n)_{\mathbb{N}}$ fallende Folge ist, (2) gilt, da auch $(\tau_n)_{\mathbb{N}}$ fallend ist.

$\Rightarrow \limsup A_n \in \tau_{\infty}$

Also gilt nach dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov: $\mathbb{P}(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$ \square

BOREL-CANTELLI-LEMMA

$(A_n)_{\mathbb{N}}$ sei Folge von Ereignissen (über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

Sind die (A_n) paarweise unabhängig, so gilt auch:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

Beweis. Es wird nur der erste Teil bewiesen (Beweis des zweiten Teiles sehr langlich).

Sei $A := \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Da $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$, konvergiert $\sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ gegen 0 für $n \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ \square